# Problemi di Fisica

## ONDE

## Moto Ondulatorio

## PROBLEMA

Una corda ha una densità lineare μ=8,0 g/m ed è soggetta a una tensione T=100 N. Calcoliamo la lunghezza d'onda λ di un'onda trasversale armonica di frequenza f=440 Hz che si propaga lungo la corda.

## SOLUZIONE

Poiché la velocità di propagazione di un'onda armonica soddisfa la relazione:

$$v = \lambda f$$

e per un'onda trasversale che si propaga lungo una corda è anche:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

si ha che:

$$\lambda = \frac{1}{f}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{440}\sqrt{\frac{100}{8{,}0 \cdot 10^{-3}}} = 0{,}25\,\text{m}$$

## PROBLEMA

Un'onda elastica trasversale si propaga lungo una corda tesa di densità lineare $\mu=6{,}00\cdot10^{-2}$ g/cm con una velocità v=15,0 m/s.

- Calcolare la tensione cui è soggetta la corda.

## SOLUZIONE

Per un'onda trasversale che si propaga lungo una corda è vero che:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

da cui è possibile ricavare la tensione cui è soggetta la corda:

$$T = \mu v^2 = 6{,}00 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{10^{-3}}{10^{-2}} \cdot 15{,}0^2 = 1{,}35\,\text{N}$$

**ATTENZIONE**: esprimere le grandezze fisiche nel SI.

## PROBLEMA

Un'onda trasversale che si propaga lungo una corda tesa attraversa un primo tratto di densità lineare $\mu_1$=20 g/m e successivamente un secondo tratto di densità lineare $\mu_2$=80 g/m.

- Determinare la relazione fra le lunghezze d'onda $\lambda_1$ e $\lambda_2$ dell'onda nei due tratti.

## SOLUZIONE

Per un'onda trasversale che si propaga lungo una corda la velocità dipende dalla tensione T e dalla densità μ del mezzo, per cui nei due tratti a diversa densità lineare abbiamo:

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \qquad v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}} \quad (1)$$

Però la tensione T è indipendenti dal mezzo, per cui ricaviamo la T dalle (1) e dal confronto otteniamo:

$$T = \mu_1 v_1^2 \quad T = \mu_2 v_2^2 \Rightarrow \mu_1 v_1^2 = \mu_2 v_2^2 \Rightarrow 20 v_1^2 = 80 v_2^2 \Rightarrow v_1^2 = 4 v_2^2 \quad (2)$$

Poiché la velocità di propagazione di un'onda trasversale soddisfa la relazione:

$$v = \lambda f$$

e tenendo presente che la frequenza f è indipendente dal mezzo, dalla (2) otteniamo la relazione fra le lunghezze d'onda $\lambda_1$ e $\lambda_2$ dell'onda nei due tratti a diversa densità lineare:

$$\lambda_1^2 f^2 = 4\lambda_2^2 f^2 \Rightarrow \lambda_1 = 2\lambda_2$$

## PROBLEMA

Un'onda trasversale viaggia lungo una corda che è tesa da una forza F =4N. Se la corda ha densità lineare μ=10 g/m e se l'ampiezza e la frequenza dell'onda sono rispettivamente A=3 cm e f = 200 Hz, calcolare la potenza media trasmessa dalla corda.

## SOLUZIONE

Il valore medio della potenza trasportata dall'onda trasversale è:

$$\bar{P} = \frac{E}{t} = \frac{2\pi^2 A^2 f^2 \mu \Delta x}{t} = 2\pi^2 A^2 f^2 \mu v \qquad \text{dove}: v = \frac{\Delta x}{t}$$

dove:

$$A = 0{,}03\,\text{m} \quad f = 200\,\text{Hz} \quad \mu = 0{,}010\,\text{kg/m} \quad v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{4}{0{,}010}} = 20\,\text{m/s}$$

per cui la (1) assume il valore:

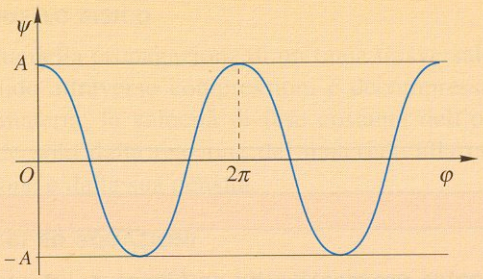
$$\bar{P} = 2\pi^2 \cdot 0{,}03^2 \cdot 200^2 \cdot 0{,}010 \cdot 20 = 142\,\text{W}$$

## PROBLEMA

**Un'onda armonica ha un'ampiezza massima $A = 18$ cm nell'istante in cui la fase è nulla; per quali valori della fase raggiunge il minimo valore?**

### ■ MODELLO FISICO

La funzione d'onda di un'onda armonica può essere rappresentata da una funzione sinusoidale di periodo $2\pi$ e, nel nostro caso, di ampiezza $A$. Il minimo valore della funzione d'onda si ha per $\psi = -A$.




### ■ LEGGI ED EQUAZIONI

La funzione d'onda si scrive:

$$\psi = A\cos(\varphi)$$

Infatti per $\varphi = 0$, allora $\psi = A$.

### ■ SOLUZIONE ALGEBRICA

Il valore della fase $\varphi$ si trova invertendo la relazione precedente:

$$\frac{\psi}{A} = \cos(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos\left(\frac{\psi}{A}\right)$$

La funzione $y = \arccos(x)$ è la funzione inversa di $y = \cos(x)$.

### ■ SOLUZIONE NUMERICA

Non è necessario cambiare unità di misura della lunghezza da cm a m; si ha pertanto

$$\varphi = \arccos\left(\frac{-A}{A}\right) = \arccos(-1) = \pi + 2\pi k$$

### ■ CONSIDERAZIONI FINALI

Nel caso particolare di questo esercizio la risposta può essere dedotta semplicemente dalle proprietà particolari della funzione $\cos x$, guardandone il grafico; in generale, però, la relazione numerica tra fase e altezza del profilo necessita il ricorso alla funzione inversa del coseno.

## PROBLEMA

Un'onda elastica si propaga in una sbarra metallica. Sapendo che l'equazione dell'onda è:

$$y = 1\cdot 10^{-6}\,\sin\left[2\cdot 10^{4}\,\pi\left(\frac{x}{5\cdot 10^{3}} - t\right)\right]$$

dove tutte le grandezze sono espresse in unità del SI, ricavare l'ampiezza, la frequenza, la lunghezza d'onda e la velocità di propagazione dell'onda.

## SOLUZIONE

Ricordando che l'equazione di un'onda può essere espressa nella forma:

$$y = A\,\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

ed essendo $T = 1/f$ e $\lambda = v/f$, assume anche la forma:

$$y = A\,\sin\left[2\pi f\left(\frac{x}{v} - t\right)\right]$$

Dal confronto con l'equazione data dal problema si ottengono le caratteristiche dell'onda:

- Ampiezza: $A = 1\cdot 10^{-6}$ m
- Frequenza: $f = 1\cdot 10^{4}$ Hz
- Velocità di propagazione: $v = 5\cdot 10^{3}$ m/s
- Lunghezza d'onda: $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{5\cdot 10^{3}}{1\cdot 10^{4}} = 0{,}5$ m

## PROBLEMA

Un'onda sinusoidale si propaga lungo una corda tesa. Se la lunghezza d'onda è 2 cm e la frequenza è 50 Hz, nell'ipotesi che la vibrazione sia nulla in un estremo della molla (x=0) nell'istante iniziale e che la sua ampiezza sia uguale a 30 cm, determinare:

1. l'equazione dell'onda;
2. gli istanti in cui la vibrazione è nulla per x=0;
3. il modulo della velocità massima e dell'accelerazione massima di una particella della corda.

## SOLUZIONE

1. L'equazione di un'onda può essere espressa nella forma:

$$y = A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right]$$

dove: $A = 0{,}30\,m$ $\lambda = 0{,}02\,m$ $v = \lambda f = 0{,}02 \cdot 50 = 1\,m/s$ $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{50} = 0{,}02\,s$

e quindi:

$$y = 0{,}30\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{0{,}02} - \frac{t}{0{,}02}\right)\right] = 0{,}30\sin\left[100\pi(x - t)\right] \quad (1)$$

2. Ponendo x=0 nell'equazione dell'onda (1) troveremo la funzione sinusoidale che descrive lo spostamento dell'estremità della molla in funzione del tempo:

$$y = 0{,}30\sin\left[-100\pi t\right]$$

Ricordando che la funzione seno si annulla quando il suo argomento è uguale a un multiplo intero di $\pi$, gli istanti in cui la vibrazione è nulla per x=0 soddisfano la seguente relazione:

$$100\pi t = n\pi \Rightarrow t = \frac{n}{100} \quad \text{con } n = 0,1,2,\ldots$$

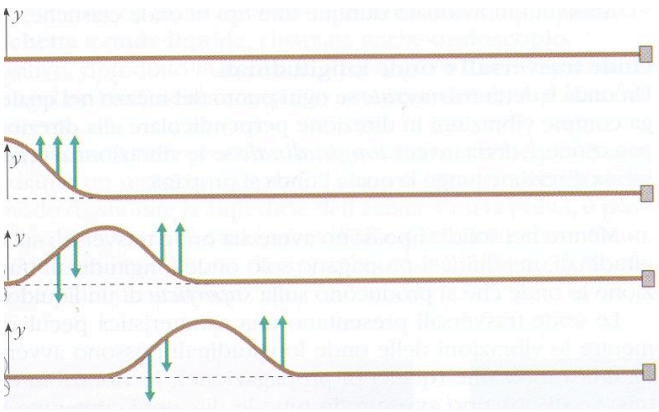
3. Per un valore di x fissato, l'equazione dell'onda descrive l'oscillazione armonica dell'elemento di corda posto in x. Tale oscillazione ha ampiezza A=0,30 m e pulsazione $\omega=2\pi f=314$ rad/s. Ricordando le proprietà del moto armonico, la velocità massima raggiunta da un elemento di corda è:

$$v = \omega A = 314 \cdot 0{,}30 = 94{,}2\,m/s$$

e la sua accelerazione vale:

$$a = \omega^2 A = 314^2 \cdot 0{,}30 = 29579\,m/s^2$$

## PROBLEMA



Un'estremità di una corda tesa viene fatta oscillare in modo da generare un'onda trasversale progressiva sinusoidale, caratterizzata da una frequenza f=200 Hz, da un'ampiezza A=2,40 cm che si propaga con velocità v=40,0 m/s.
Nell'ipotesi che al tempo t=0 l'estremità della corda sia spostata verso l'alto di un tratto y=1,20 cm, determinare l'equazione dell'onda espressa in funzione del numero d'onda k e della frequenza angolare ω.

## SOLUZIONE

Determiniamo prima ω e k:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 200 = 1{,}26 \cdot 10^3 \text{ rad/s} \qquad k = \frac{\omega}{v} = \frac{1{,}26 \cdot 10^3}{40{,}0} = 31{,}4 \text{ m}^{-1}$$

Al tempo t=0 e nel punto di coordinata x=0 la fase dell'onda è diversa da zero. Si ha perciò:

$$y = A \sin\phi \quad \text{da cui:} \quad \sin\phi = \frac{y}{A} = \frac{1{,}2}{2{,}4} = 0{,}5 \Rightarrow \phi = 30° = 0{,}524 \text{ rad}$$

Scrivendo l'equazione dell'onda nella forma:

$$y = A \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

e sostituendo i valori numerici trovati per i parametri ω, k e Φ, espressi nelle unità del SI, si ha:

$$y = 2{,}40 \cdot 10^{-2} \sin(31{,}4x - 1{,}26 \cdot 10^3 t + 0{,}524)$$

## PROBLEMA

Un'onda armonica di ampiezza uguale a 12,0 cm e frequenza uguale a 5,00 Hz si propaga lungo un asse x fissato con velocità pari a 20,0 m/s.

- Determinare l'equazione dell'onda, sapendo che lo spostamento è massimo per x=0 e t=0.

## SOLUZIONE

La forma più generale dell'equazione di un'onda armonica è:

$$y = A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

dove la costante Φ rappresenta la fase dell'onda nel punto x=0 e nell'istante t=0. In questo caso, per x=0 e t=0 lo spostamento è massimo e quindi Φ deve soddisfare la condizione:

$$\sin\phi = 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

La pulsazione dell'onda per definizione è pari a:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 5{,}00 = 31{,}4\,\text{rad/s}$$

mentre il numero d'onda è:

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{31{,}4}{20{,}0} = 1{,}57\,\text{rad/m}$$

In definitiva, l'equazione dell'onda assume la forma:

$$y = 0{,}120\sin\left(1{,}57x - 31{,}4t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}120\cos(1{,}57x - 31{,}4t)$$

## PROBLEMA

Un pescatore osserva un'onda marina sinusoidale che penetra nell'imboccatura di una darsena. Egli conta 40 creste in un minuto e valuta 2 m la distanza fra le creste e 20 cm la loro ampiezza.

- Determinare l'equazione dell'onda.

## SOLUZIONE

L'equazione di un'onda può essere espressa nella forma:

$$y = A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} + \phi\right)\right]$$

dove:

$A = 0{,}2$ m $\quad f = \frac{40}{60} = 0{,}67\,\text{Hz} \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}67} = 1{,}5 = \frac{3}{2} \quad \lambda = 2\,\text{m}$

Quindi l'equazione dell'onda diventa:

$$y = 0{,}2\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{3}t + \phi\right)\right]$$

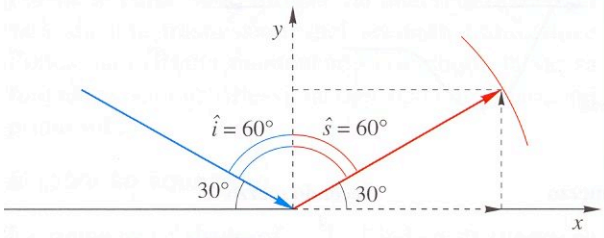
dove la costante $\Phi$ (fase dell'onda a t=0 e x=0) non può essere determinata con i dati del problema a disposizione

## PROBLEMA

**Un'onda si propaga lungo una direzione che forma un angolo di 30° rispetto alla superficie di un ostacolo riflettente. Se la velocità dell'onda è di 240 m/s, calcola a quale distanza dalla superficie si trova il fronte d'onda un secondo dopo la riflessione.**

### ■ MODELLO FISICO

Il fronte d'onda, dotato di velocità costante in modulo, incide sulla superficie con un angolo di 60° rispetto alla normale, essendo questo il complementare dell'angolo rispetto alla superficie; la riflessione avviene con angolo uguale a quello di incidenza.




### ■ LEGGI ED EQUAZIONI

Il moto del fronte d'onda dopo la riflessione è rettilineo uniforme e può essere scomposto nelle due direzioni $x$ e $y$.

Le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} x(t) = v_x t \\ y(t) = v_y t \end{cases}$$

avendo posto l'origine delle coordinate nel punto di incidenza con la superficie. La componente della velocità $v$ lungo l'asse $y$ è $v_y = v \operatorname{sen} 30°$.

### ■ SOLUZIONE ALGEBRICA

Sostituendo la relazione trovata per $v_y$ nell'equazione del moto, si ottiene la distanza $y$ dalla superficie:

$$y(t) = (v \operatorname{sen} 30°)\, t$$

### ■ SOLUZIONE NUMERICA

Sostituendo i valori forniti dal problema si ottiene la distanza $d$ richiesta:

$$d = 240 \text{ m/s} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ s} = 120 \text{ m}$$

## PROBLEMA

**Due corde di differente materiale sono legate tramite un nodo; si fa oscillare l'estremità di una corda con velocità $v_1 = 10$ m/s e con lunghezza d'onda $\lambda_1 = 50$ cm; sapendo che l'indice di rifrazione della seconda corda rispetto alla prima è $n_{12} = 1{,}15$, calcola la frequenza $f$ dei due tratti di corda, la velocità e la lunghezza d'onda nel secondo tratto di corda. Quale sarà la forma dell'onda riflessa?**

### ■ MODELLO FISICO

Poiché le corde sono formate da materiali diversi, ci sarà sia una trasmissione nel secondo tratto, dove l'onda sarà rifratta mantenendo comunque la stessa frequenza, sia una riflessione dell'onda originaria nel primo tratto.

### ■ LEGGI ED EQUAZIONI

La frequenza $f$ risulta $f = \dfrac{v_1}{\lambda_1}$; l'indice di rifrazione del secondo mezzo di propagazione rispetto al primo per definizione è: $n_{12} = \dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

### ■ SOLUZIONE ALGEBRICA

Dalla precedente equazione si ricava:

$$v_2 = \frac{v_1}{n_{12}} \qquad \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{n_{12}}$$

### ■ SOLUZIONE NUMERICA

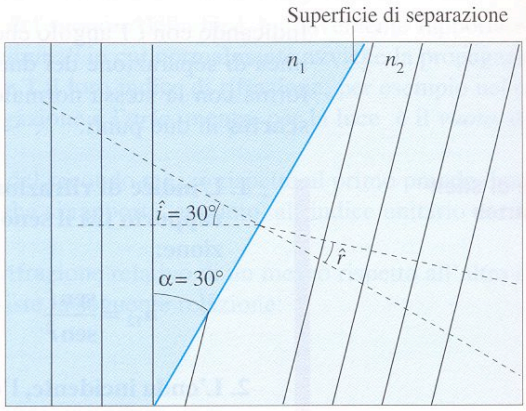
Tenendo conto che $\lambda_1 = 50$ cm $= 0{,}50$ m si ottiene:

$$f = \frac{10 \text{ m/s}}{0{,}5 \text{ m}} = 20 \text{ Hz}$$

$$v_2 = \frac{10 \text{ m/s}}{1{,}15} \cong 8{,}7 \text{ m/s} \qquad \lambda_2 = \frac{0{,}5 \text{ m}}{1{,}15} \cong 0{,}43 \text{ m}$$

## PROBLEMA

**Il fronte di un'onda rettilinea creata in un ondoscopio ha frequenza $f = 30$ Hz e lunghezza d'onda $\lambda = 2{,}0$ cm; essa si propaga in una zona della vaschetta a più bassa profondità, creata con uno spessore appoggiato sul fondo, inclinato di un angolo $\alpha = 30°$ rispetto al fronte dell'onda incidente.**
**Sapendo che l'indice di rifrazione relativo della zona a bassa profondità è $n_{12} = 1{,}22$, determina l'angolo di rifrazione e la velocità dell'onda rifratta.**




### ■ MODELLO FISICO

La zona a più bassa profondità d'acqua rifrange come un mezzo di propagazione più denso e quindi farà diminuire la velocità e la lunghezza d'onda dell'onda incidente. Per costruzione il valore dell'angolo $\alpha$ è uguale a quello dell'angolo di incidenza perché sono essi sono complementari di angoli uguali.

### ■ LEGGI ED EQUAZIONI

In base alla legge di Snell possiamo scrivere:

$$n_{12} = \frac{\operatorname{sen}\hat{i}}{\operatorname{sen}\hat{r}}$$

dove per definizione $n_{12} = \dfrac{v_1}{v_2}$, con $v_1$ velocità dell'onda nel primo mezzo e $v_2$ nel secondo. La frequenza costante risulta essere $f = \dfrac{v_1}{\lambda_1}$.

### ■ SOLUZIONE ALGEBRICA

Dalla legge di Snell otteniamo:

$$\operatorname{sen}\hat{r} = \frac{\operatorname{sen}\hat{i}}{n_2} \quad \Rightarrow \quad \hat{r} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{sen}\hat{i}}{n_2}\right)$$

La velocità dell'onda rifratta si ricava dalla sua relazione con l'indice di rifrazione, in cui si sostituisce $v_1 = f\lambda_1$:

$$v_2 = \frac{v_1}{n_2} = \frac{f\lambda_1}{n_2}$$

### ■ SOLUZIONE NUMERICA

Sostituendo i valori forniti dal problema si ottiene infine:

$$\hat{r} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\operatorname{sen} 30°}{1{,}22}\right) \cong 24{,}2°$$

$$v_2 = \frac{30\ \text{Hz} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m}}{1{,}22} \cong 0{,}49\ \text{m/s}$$

## PROBLEMA

**Un'onda proviene da un mezzo con indice di rifrazione $n_1 = 1{,}48$ e si trasmette in un altro mezzo con indice di rifrazione unitario; calcola con quale inclinazione rispetto alla normale deve incidere l'onda per esser riflessa totalmente.**

### ■ MODELLO FISICO

Affinché si verifichi il fenomeno della riflessione totale l'onda deve incidere almeno con un angolo uguale all'angolo limite $\hat{l}$, in modo che l'angolo di rifrazione sia 90°. Ciò accade quando l'onda è trasmessa in un mezzo di propagazione che ha indice di rifrazione assoluto minore di quello di provenienza: $n_1 > n_2$; in questo caso $n_2 = 1$ ed $n_1 = 1{,}48$.

### ■ LEGGI ED EQUAZIONI

Poiché gli indici di rifrazione sono assoluti, la legge di Snell si scrive:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\operatorname{sen}\hat{l}}{\operatorname{sen}\hat{r}}$$

La condizione di riflessione totale è $\hat{r} = 90°$, per cui $\operatorname{sen}\hat{r} = 1$.

### ■ SOLUZIONE ALGEBRICA

Per ricavare l'angolo limite risolviamo la legge di Snell rispetto a $\hat{l}$:

$$\operatorname{sen}\hat{l} = \frac{n_2}{n_1} \quad \Rightarrow \quad \hat{l} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

### ■ SOLUZIONE NUMERICA

Sostituendo i valori forniti dal problema si ottiene:

$$\hat{l} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{1{,}48}\right) \cong 42°$$

## PROBLEMA

Un'onda si propaga lungo una corda tesa formata da due tratti di diversa densità lineare: il primo con $\mu_1$=0,20 g/m e il secondo con $\mu_2$=7,2 g/m. Poiché al mutare della densità della corda si verifica un fenomeno di rifrazione, calcolare la lunghezza d'onda dell'onda nel secondo tratto sapendo che nel primo tratto è $\lambda_1$ = 12 cm.

## SOLUZIONE

Per un'onda trasversale che si propaga lungo una corda la velocità dipende dalla tensione T e dalla densità μ del mezzo, per cui nei due tratti a diversa densità lineare abbiamo:

$$v_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}} \qquad v_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}} \quad (1)$$

Però la tensione T è indipendenti dal mezzo, per cui ricaviamo la T dalle (1) e dal confronto otteniamo:

$$T = \mu_1 v_1^2 \quad T = \mu_2 v_2^2 \Rightarrow \mu_1 v_1^2 = \mu_2 v_2^2 \Rightarrow 0{,}20 v_1^2 = 7{,}2 v_2^2 \Rightarrow v_1^2 = 36 v_2^2 \quad (2)$$

Poiché la velocità di propagazione di un'onda trasversale soddisfa la relazione:

$$v = \lambda f$$

e tenendo presente che la frequenza f è indipendente dal mezzo, dalla (2) otteniamo la relazione fra le lunghezze d'onda $\lambda_1$ e $\lambda_2$ dell'onda nei due tratti a diversa densità lineare:

$$\lambda_1^2 f^2 = 36\lambda_2^2 f^2 \Rightarrow \lambda_1 = 6\lambda_2 \quad (3)$$

Poiché è nota la lunghezza d'onda nel primo tratto, dalla (3) ricaviamo la lunghezza d'onda dell'onda nel secondo tratto:

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{6} = \frac{12}{6} = 2\,\text{cm}$$

## PROBLEMA

Le oscillazioni prodotte da due onde armoniche in uno stesso punto di un mezzo elastico avvengono lungo la stessa direzione e sono descritte dalle equazioni:

$$y_1 = 0{,}4\cos 20\pi t \qquad y_2 = 0{,}4\cos\left(20\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

in cui i valori numerici sono espressi in unità del SI.

- Determinare l'equazione dell'onda risultante.

## SOLUZIONE

Per il principio di sovrapposizione, l'onda risultante prodotta dalle due onde armoniche in uno stesso punto è data da:

$$y = y_1 + y_2 = 0{,}4\cos 20\pi t + 0{,}4\cos\left(20\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = 0{,}4\left[\cos 20\pi t + \cos\left(20\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\right] \quad (1)$$

Per semplificare questa espressione possiamo usare la formula di prostaferesi:

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

per cui la (1) diventa:

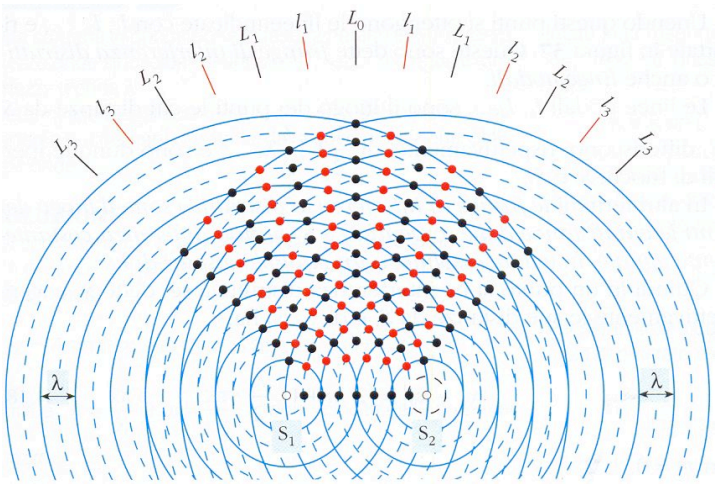
$$y = 0,4\left[2\cos\frac{20\pi t + 20\pi t + \frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{20\pi t - 20\pi t - \frac{\pi}{3}}{2}\right] = 0,8\cos\frac{40\pi t + \frac{\pi}{3}}{2}\cos\frac{\pi}{6} = 0,69\cos\left(20\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

## PROBLEMA

Due sorgenti puntiformi $S_1$ e $S_2$ generano, vibrando in fase sulla superficie di un liquido, due onde caratterizzate dalla stessa ampiezza massima e dalla stessa lunghezza d'onda $\lambda$=3,0 cm.

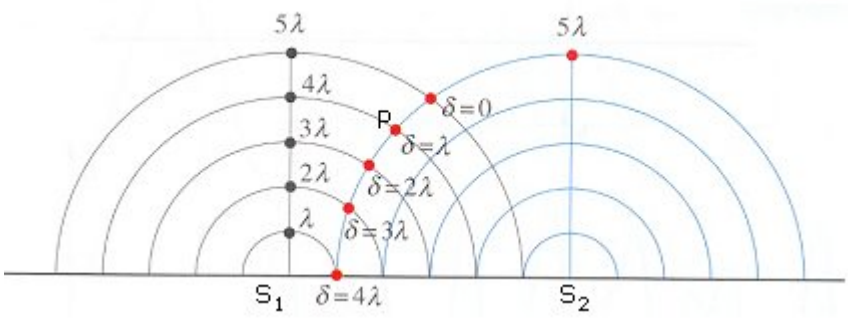
1. Sapendo che la sorgente $S_1$ dista 15 cm da un punto P situato sulla prima frangia costruttiva dopo quella centrale, a quale distanza da P si trova la sorgente $S_2$?
2. Ripetere il problema nel caso in cui la sorgente $S_1$ dista 15 cm da un punto P situato sulla prima frangia distruttiva dopo quella centrale.

## SOLUZIONE




1. Poiché le due onde hanno la stessa lunghezza d'onda, la stessa ampiezza e sono generate da due sorgenti che vibrano in fase, vuol dire che entrambe le sorgenti, durante il loro moto armonico, si trovano a un massimo (o a un minimo) di oscillazione sempre in istanti uguali. Le circonferenze con centri nelle sorgenti $S_1$ e $S_2$ rappresentano i fronti d'onda in un dato istante. Le circonferenze a tratto continuo rappresentano le creste dell'onda, mentre quelle tratteggiate indicano i fronti d'onda corrispondenti alle gole.

La distanza fra due creste (o fra due gole) è la lunghezza d'onda $\lambda$, mentre la distanza fra una cresta e una gola è $\lambda/2$.
I pallini neri indicano i punti in cui si trovano due creste o due gole. In questi punti le perturbazioni della superficie dell'acqua sono in fase e si rafforzano a vicenda. Si dice, pertanto, che in essi le onde interferiscono *costruttivamente.*
Più precisamente, avendo supposto che le onde generate dalle due sorgenti abbiano la stessa ampiezza *A,* nei punti di interferenza costruttiva la perturbazione risultante ha *ampiezza doppia,* cioè uguale a *2A.*




Unendo tali punti si ottengono delle linee, indicate con $L_0$, $L_1$, $L_2$,… che sono dette *frange di interferenza costruttiva.*

Consideriamo adesso $L_0$, asse del segmento di estremi $S_1$ e $S_2$. Questa linea è il luogo dei punti aventi uguale distanza da $S_1$ e $S_2$. I punti delle linee $L_1$, $L_2$,… hanno invece distanze da $S_1$ e $S_2$ che differiscono costantemente di una, due, ecc. lunghezze d'onda.

Dunque:

*le frange di interferenza costruttiva sono il luogo dei punti le cui distanze dalle sorgenti $S_1$ e $S_2$ hanno differenza costantemente uguale, in valore assoluto, a un multiplo intero della lunghezza d'onda' $\lambda$.*

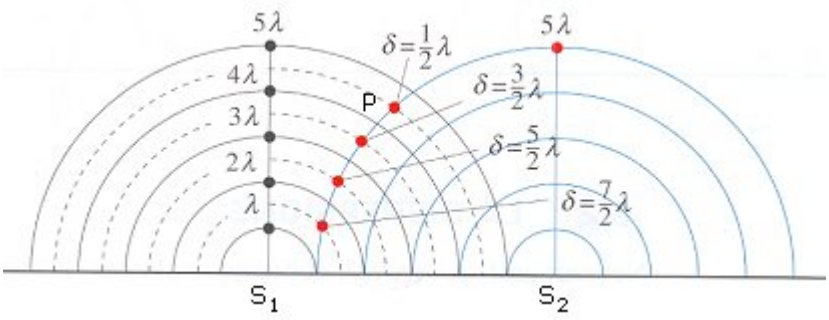
In conclusione, ammesso che le sorgenti $S_1$ e $S_2$ oscillino in fase alla stessa frequenza, in un punto *P* dello spazio si ha interferenza costruttiva se le distanze $x_1$ e $x_2$ percorse dalle onde per giungere in *P* soddisfano la relazione:

$$\Delta x = \delta = |x_1 - x_2| = m\lambda \qquad \text{con } m = 0,1,2,3,\ldots$$

Poiché il punto P si trova sulla prima frangia costruttiva (m = 1) dopo quella centrale, la distanza della sorgente $S_2$ da P vale:

$$|15 - x_2| = \lambda \Rightarrow |15 - x_2| = 3 \Rightarrow x_2 = 18\,\text{cm}$$

2. I pallini rossi indicano i punti dove giungono una cresta da una sorgente e una gola dall'altra. In tali punti, detti *nodi,* la perturbazione risultante è nulla e la superficie dell'acqua rimane immobile. Unendo questi punti si ottengono le linee indicate con $l_1$, $l_2$,…. Queste sono dette *frange di interferenza distruttiva* o anche *linee nodali.* Le linee nodali $l_1$, $l_2$,…sono il luogo dei punti le cui distanze da $S_1$ e $S_2$ differiscono, rispettivamente, di ½ λ, 3/2 λ, …




In altri termini:

*le frange di interferenza distruttiva sono il luogo dei punti le cui distanze dalle sorgenti $S_1$ e $S_2$ hanno differenza costantemente uguale, in valore assoluto, a un multiplo dispari di $\lambda/2$.*

Quindi in un punto si ha interferenza distruttiva se, dette $x_1$ e $x_2$ rispettivamente le sue distanze da $S_1$ e $S_2$, si ha:

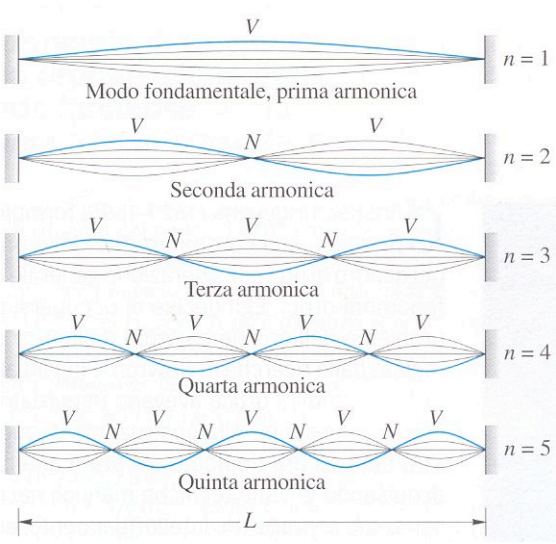
$$\Delta x = \delta = |x_1 - x_2| = (2m+1)\frac{\lambda}{2} \qquad \text{con } m = 0,1,2,3,\ldots$$

Poiché il punto P si trova sulla prima frangia distruttiva (m = 0) dopo quella centrale, la distanza della sorgente $S_2$ da P vale:

$$|15 - x_2| = \frac{1}{2}\lambda \Rightarrow |15 - x_2| = \frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} + 15 = 16{,}5\,\text{cm}$$

## PROBLEMA

Sollecitiamo una corda fissata per i due estremi nel suo punto medio, in modo da ottenere un'onda stazionaria.
Se la corda è lunga L=50,0 cm, la sua massa per unità di lunghezza è $\mu=1{,}20\cdot10^{-2}$ kg/m e la tensione che agisce da forza di richiamo è T=600 N, qual è la frequenza fondamentale di vibrazione della corda?




## SOLUZIONE

Pizzicando la corda nel suo punto medio, produciamo la configurazione di onda stazionaria: prima armonica. Alle diverse configurazioni di onda stazionaria che possono essere prodotte nella corda, sono associate diverse lunghezze d'onda e quindi diverse frequenze di risonanza:

$$f_n = n\frac{v}{2L} \qquad \text{con: } n=1,2,3,\ldots$$

La più piccola frequenza, cioè $f_1$, è chiamata frequenza fondamentale o prima armonica:

$$f_1 = \frac{v}{2L}$$

Tenendo conto dell'espressione della velocità di propagazione di un'onda lungo la corda:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

si ottiene:

$$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} = \frac{1}{2\cdot0{,}50}\cdot\sqrt{\frac{600}{1{,}20\cdot10^{-2}}} = 224\,\text{Hz}$$

## PROBLEMA

Una corda di pianoforte è lunga 1,0 m e ha una massa di 10 g. Calcolare la tensione che deve avere la corda per vibrare con una frequenza fondamentale pari a 130 Hz.

## SOLUZIONE

La più piccola frequenza $f_1$, chiamata frequenza fondamentale, che può essere prodotta dalla corda del pianoforte in seguito alla tensione cui è sottoposta, è data da:

$$f_1 = \frac{v}{2L}$$

da cui è possibile ricavare la velocità di propagazione dell'onda lungo la corda:

$$v = 2Lf_1 = 2\cdot1{,}0\cdot130 = 260\,\text{m/s}$$

Dalla relazione della velocità di propagazione di un'onda trasversale in un mezzo solido è possibile ricavare la tensione che deve avere la corda per vibrare con una frequenza fondamentale $f_1 = 130$ Hz:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow T = \mu v^2 = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 260^2 = 676\,N$$

dove la densità lineare è data da:

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{1{,}0} = 10 \cdot 10^{-3}\ kg/m$$

## PROBLEMA

Una corda di violino è realizzata con un materiale di densità lineare pari a $9{,}00 \cdot 10^{-3}$ kg/m. La corda è tenuta in tensione fra due punti fissi (nodi) da una forza di 740 N.

- Sapendo che la frequenza fondamentale della corda è 440 Hz, corrispondente alla nota *la*, qual è la lunghezza della corda?

## SOLUZIONE

La velocità di propagazione dell'onda lungo la corda di violino è data da:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{740}{9{,}00 \cdot 10^{-3}}} = 287\,m/s$$

e dalla relazione della frequenza fondamentale ricaviamo la lunghezza della corda:

$$f_1 = \frac{v}{2L} \Rightarrow L = \frac{v}{2f_1} = \frac{287}{2 \cdot 440} = 0{,}33\,m = 33\,cm$$

## PROBLEMA

Due onde di uguale ampiezza A e stesso periodo T si propagano in versi opposti lungo un asse x fissato. Gli spostamenti $y_1$ e $y_2$ delle particelle del mezzo, prodotti singolarmente dalle due onde, avvengono lungo la stessa direzione e, per un dato istante t e una data posizione x, sono descritti dalle seguenti equazioni:

$$y_1 = A \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] \qquad y_2 = A \sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right)\right]$$

1. Dimostrare che, dalla sovrapposizione delle due onde, si ottiene un'onda stazionaria;
2. Determinare la posizione dei nodi dell'onda stazionaria risultante e la distanza fra due nodi consecutivi;
3. Determinare l'ampiezza del moto armonico di una particella che si trova in corrispondenza di un ventre dell'onda stazionaria.

## SOLUZIONE

1. Per il principio di sovrapposizione, lo spostamento risultante y del punto del mezzo che si trova nella posizione x è dato, per ogni istante t, dalla somma:

$$y = y_1 + y_2 = A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right)\right] + A\sin\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T}\right)\right] \quad (1)$$

Usando l'identità trigonometrica (formule di prostaferesi):

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

la (1) diventa:

$$y = 2A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \quad (2)$$

Lo spostamento y non è una funzione dell'argomento $\left(\frac{x}{\lambda} \pm \frac{t}{T}\right)$ e pertanto rappresenta una vibrazione del mezzo che non si propaga, cioè un'onda stazionaria.

2. L'equazione (2) mostra che una qualsiasi particella del mezzo, posta nel punto x, oscilla di moto armonico con periodo T e ampiezza variabile con x uguale a:

$$x_0 = 2A\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

I punti nei quali tale ampiezza è nulla rappresentano i nodi dell'onda stazionaria. Imponiamo perciò:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right) = 0$$

Ricordando che la funzione seno è nulla quando il suo argomento è uguale a $0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots$, deve essere:

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = n\pi \qquad \text{con } n = 0,1,2,\ldots$$

I nodi si trovano quindi nelle posizioni:

$$x = n\frac{\lambda}{2}$$

cioè in: $x = 0, \quad x = \frac{\lambda}{2}, \quad x = \lambda, \quad x = \frac{3}{2}\lambda, \ldots$

Da questo segue che la distanza fra due nodi consecutivi è uguale a mezza lunghezza d'onda.

3. In un ventre dell'onda stazionaria la vibrazione del mezzo ha ampiezza pari a:

$$x_0 = 2A$$

## PROBLEMA

Le oscillazioni prodotte da due onde armoniche in uno stesso punto di un mezzo elastico avvengono lungo la stessa direzione e sono descritte dalle equazioni:

$$y_1 = 0{,}8\cos\left(40\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad y_2 = 0{,}8\cos 40\pi t$$

in cui i valori numerici sono espressi in unità del SI.

Determinare:

1. la frequenza delle due onde;
2. gli istanti compresi in un periodo, a partire da t = 0, in cui l'ampiezza dell'onda ottenuta dalla sovrapposizione delle due onde è minima o massima.
3. Rappresentare graficamente le due onde.

## SOLUZIONE

1. Tenendo presente che l'equazione di un'onda armonica è del tipo:

$$y = A\sin(kx - \omega t + \phi)$$

confrontata con le equazioni che rappresentano $y_1$ e $y_2$, si ottiene che:

$$\omega = 40\pi\,\text{rad}/\text{s}$$

e conoscendo l'espressione della pulsazione $\omega$, siamo in grado di determinare la frequenza delle due onde:

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{40\pi}{2\pi} = 20\,\text{Hz}$$

2. Per il principio di sovrapposizione, lo spostamento risultante di un punto del mezzo in cui si incontrano le due onde è uguale, in un dato istante, alla somma degli spostamenti prodotti dalle singole onde in quel punto e in quell'istante:

$$y = y_1 + y_2 = 0{,}9\cos\left(40\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + 0{,}8\cos 40\pi t = 0{,}8\left[\cos\left(40\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + \cos 40\pi t\right] \quad (1)$$

Usando l'identità trigonometrica (formule di prostaferesi):

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

la (1) diventa:

$$y = 0{,}8\left[2\cos\frac{40\pi t + \frac{\pi}{2} + 40\pi t}{2}\cos\frac{40\pi t + \frac{\pi}{2} - 40\pi t}{2}\right] = 1{,}6\left[\cos\left(40\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}\right] = 1{,}13\cos\left(40\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

I punti nei quali tale ampiezza è minima sono quelli per cui:

$$\cos\left(40\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

ossia quando l'argomento della funzione coseno soddisfa la condizione:

$$40\pi t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

da cui è possibile ricavare l'istante compreso in un periodo (k = 1), a partire da t=0, in cui l'ampiezza dell'onda risultante è minima:

$$160t + 1 = 2 + 2k \Rightarrow t = \frac{1 + 2k}{160} = \frac{3}{160} = 0{,}019\,s$$

I punti nei quali l'ampiezza y dell'onda risultante è massima sono quelli per cui:

$$\cos\left(40\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

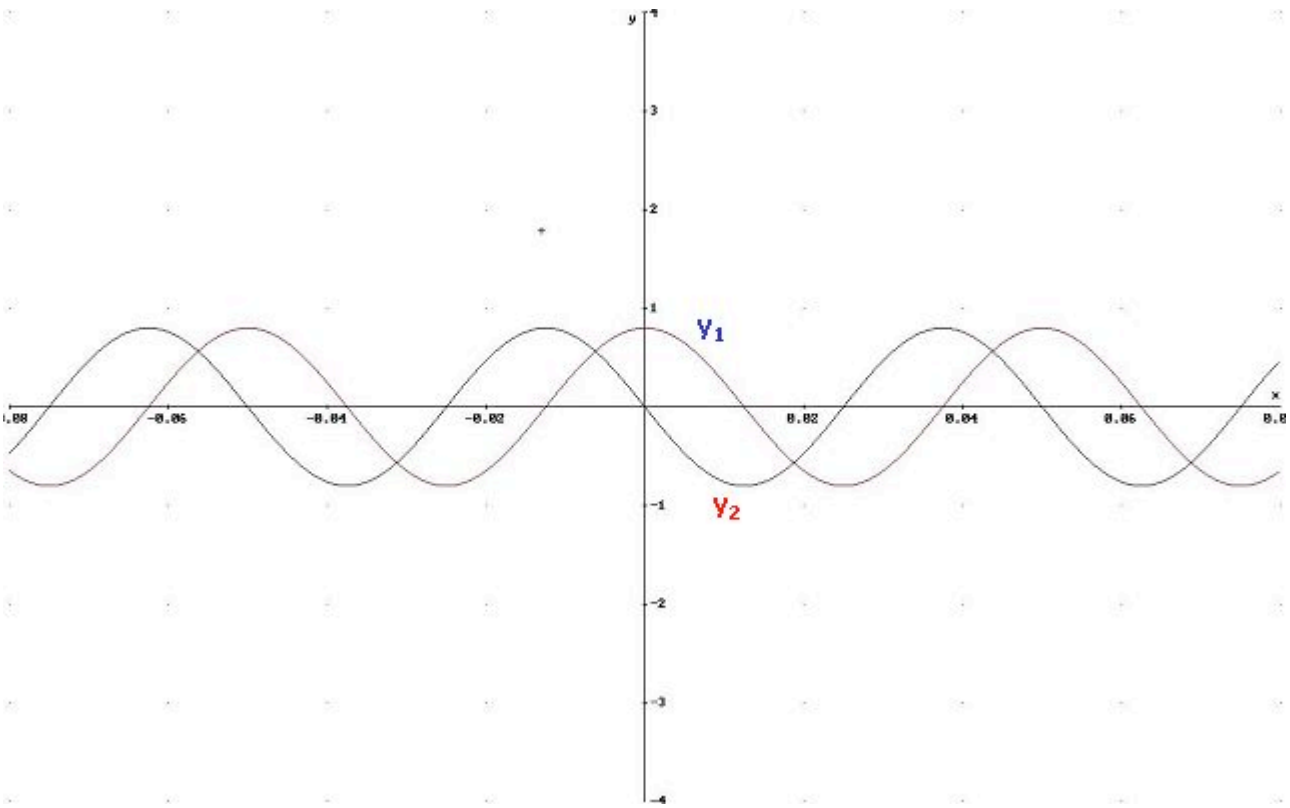
ossia quando l'argomento della funzione coseno soddisfa la condizione:

$$40\pi t + \frac{\pi}{4} = 0 + 2k\pi$$

da cui è possibile ricavare l'istante compreso in un periodo (k = 1), a partire da t=0, in cui l'ampiezza dell'onda risultante è massima:

$$160t + 1 = 8k \Rightarrow t = \frac{8k - 1}{160} = \frac{7}{160} = 0{,}044\,s$$

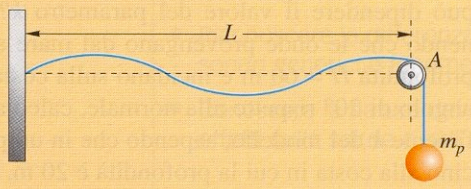
3. La rappresentazione grafica delle due onde è la seguente:



## PROBLEMA

**Un cavo di acciaio di massa $m$ = 32 kg e lunghezza $L$ = 1,2 m è attaccato per un'estremità a una parete e per l'altra estremità a un peso di massa $m_p$ che lo mantiene in tensione tramite una carrucola. Il cavo è pertanto libero di oscillare tra la parete e il punto $A$ di attacco della carrucola. Determina quale deve essere il valore della massa $m_p$ per far vibrare la corda a una frequenza $f_3$ = 4,5 Hz corrispondente alla terza armonica.**

### ■ MODELLO FISICO




La vibrazione del cavo avviene grazie alla tensione dovuta alla forza peso che agisce sulla massa $m_p$; si tratta quindi di un'oscillazione a estremi fissati. La velocità dell'oscillazione dipende dalla tensione e dalla densità del cavo.

### ■ LEGGI ED EQUAZIONI

La velocità $v$ dell'oscillazione è uguale a $v = \sqrt{\frac{F}{\rho}}$, con $F = m_p g$ tensione del cavo e $\rho = \frac{m}{L}$ densità lineare.

La frequenza corrispondente alla terza armonica si trova attraverso la relazione $f_3 = \frac{3v}{2L}$.

### ■ SOLUZIONE ALGEBRICA

La tensione cui deve essere sottoposto il cavo è:

$$F = m_p g = v^2 \rho \quad \Rightarrow \quad m_p = \frac{v^2 \rho}{g}$$

La velocità si ricava dalla relazione della terza armonica: $v = \frac{2L f_3}{3}$.

Sostituendo $v$ nella formula della massa si ottiene:

$$m_p = \frac{\left(\frac{2L f_3}{3}\right)^2 \Big/ \rho}{g}$$

### ■ SOLUZIONE NUMERICA

Sostituendo i valori forniti dal problema si ottiene:

$$m_p = \frac{(2 \cdot 1{,}2\ \text{m} \cdot 4{,}5\ \text{Hz}/3)^2 \cdot (32\ \text{kg}/1{,}2\ \text{m})}{9{,}8\ \text{m/s}^2} \cong 35{,}3\ \text{kg}$$